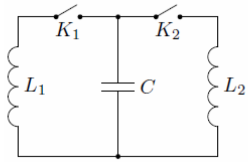
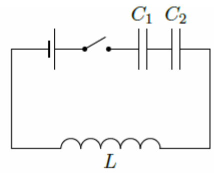
Урок №15 (5.11.2019)
Разбор задач самостоятельной работы.

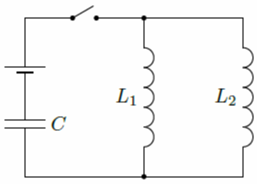
1. Две катушки самоиндукции с индуктивностями L_1 и L_2 подключены через ключи K_1 и K_2 к конденсатору ёмкостью C (см. рисунок). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты, а конденсатор заряжен до разности потенциалов U_0. Сначала замыкают ключ K_1 и, когда напряжение на конденсаторе становится равным нулю, замыкают ключ K_2. Определить максимальную и минимальную силу тока, протекающего через катушку L_1 после замыкания ключа K_2. Активным сопротивлением катушек пренебречь. (*МФТИ, 1981*)



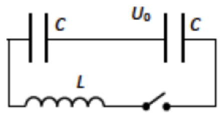
2. В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа конденсаторы были не заряжены. После замыкания ключа максимальный ток в катушке равен I_0.
   a. Найдите ЭДС источника.
   b. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе C_1.
   («Физтех», 2012)



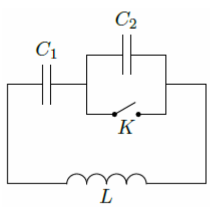
3. В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал, конденсатор не был заряжен. После замыкания ключа максимальное напряжение на конденсаторе равно U_0.
   a. Найдите ЭДС источника.
   b. Найдите максимальный ток в катушке L_1.
   («Физтех», 2012)



4. В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке, вначале один из конденсаторов заряжен до напряжения U_0 = 10 В, а второй не заряжен. Ключ замыкают. Определите модуль скорости изменения силы тока $\left|\dfrac{dI}{dt}\right|$ в цепи в момент, когда энергия, запасённая в катушке, равна половине энергии, запасённой в конденсаторах. Индуктивность катушки L = 57,7 мГн. (МОШ, 2017, 11)

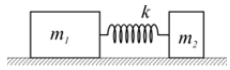


5. При замкнутом ключе K в LC-контуре (см. рисунок) происходят свободные незатухающие колебания тока. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе C_1 максимально и равно U_1, ключ размыкают. Определить максимальное значение тока в контуре после размыкания ключа. Параметры элементов схемы указаны на рисунке. (*МФТИ, 2001*)



Решения.

1. Воспользуемся механическим эквивалентом, чтобы понять, что происходит в задаче. Эквивалентная схема – это два груза m_1 и m_2, соединённые пружиной, жёсткости k. В начальный момент пружина сжата, потом отпускают один груз и, в тот момент, когда пружина достигает недеформированного состояния, отпускают второй груз. Необходимо найти минимальную и максимальную скорости груза m_1.



Первое, что надо сделать в решении механической задачи данного типа – перейти в систему центра масс. Для этого найдём скорость груза m_1 в момент освобождения груза m_2.

$\frac{kx_m^2}{2} = \frac{m_1 v_{1m}^2}{2}$, где x_m – максимальное сжатие (или растяжение) пружины, v_{1m} – максимальная скорость груза m_1.

$$v_{1m} = x_m \sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

Тогда скорость центра масс

$$v_c = \frac{v_{1m} m_1}{m_1 + m_2}.$$

Очевидно, что минимальная и максимальная скорости груза m_1 достигаются в момент, когда пружина максимально деформирована, вне зависимости от системы координат. В системе центра импульса эти скорости $v'_{1\min}$ и $v'_{1\max}$ совпадают по величине и противоположны по знаку. При этом одна из этих скоростей нам уже известна – это скорость в начальный момент времени, когда систему освобождают: $v'_{1\max} = v_{1m} - v_c$. Тогда $v_{1\min} = v_c - v_{1m}$.

Переходя обратно в лабораторную систему:

$$v_{1\max} = v'_{1\max} + v_c = v_{1m},$$

$$v_{1\min} = v'_{1\min} + v_c = 2v_c - v_{1m}$$

$$v_{1\min} = 2v_{1m}\frac{m_1}{m_1 + m_2} - v_{1m} = v_{1m}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

Переходя к электрическим аналогам:

$$I_{1\max} = I_0,$$

$$I_{1\min} = I_0\left(\frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2}\right),$$

$I_0 = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}$ – проще всего получить непосредственно из закона сохранения энергии $\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_0^2}{2}$.

3. Для ответа на первый вопрос достаточно понять, что колебания в LC-контуре (где $L = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$) происходят со смещением по напряжению, вызываемым наличием источника питания. То есть напряжение на конденсаторе изменяется не в диапазоне от $-U_{amp}$ до U_{amp}, а в диапазоне от $U_{\min} = -U_{amp} + \varepsilon$ до $U_{\max} = U_{amp} + \varepsilon$. При этом сначала конденсатор имеет напряжение $U_{\min} = 0$, а максимальное напряжение равно $U_{\max} = U_0$. Из этого следует, что $\varepsilon = \dfrac{U_0}{2}$.

   Теперь найдём максимальный ток I_1 в катушке L_1. Из закона сохранения энергии очевидно, что полный максимальный ток через обе катушки равен $I_m = \dfrac{U_0}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = I_1 + I_2$*.

   При этом в любой момент времени разность потенциалов на обеих катушках одна и та же, то есть

   $L_1 \dfrac{di_1}{dt} = L_2 \dfrac{di_2}{dt}$, следовательно

   $di_2 = \dfrac{L_1}{L_2} di_1$ и $I_2 = \dfrac{L_1}{L_2} I_1$.

   Отсюда следует, что

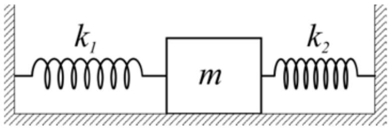
   $$I_1\left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right) = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{C\left(L_1 + L_2\right)}{L_1 L_2}},$$

   или

   $$I_1 = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{CL_2}{L_1\left(L_1 + L_2\right)}}$$

* В уравнении стоит $\dfrac{U_0}{2}$, так как это амплитуда напряжения на конденсаторе. При этом то, что напряжение меняется от нуля до U_0 не важно, также, как не важно (пользуясь механическим эквивалентом), что пружина в вертикально расположенном пружинном маятнике совершает колебания вокруг точки равновесия.

5. В данной задаче механический эквивалент выглядит так, как показано на рисунке. До тех пор, пока ключ замкнут, конденсатор C_2 закорочен и не участвует в процессе. Фраза «напряжение на конденсаторе C_1 максимально и равно U_1» в механическом эквиваленте означает, что пружина k_1 растянута до максимального известного значения $_\Delta l_0$. При этом напряжение на конденсаторе C_2 равно нулю, т.е. пружина k_2 не деформирована. Нам необходимо найти максимальное значение тока, т.е. в переводе на механический эквивалент – максимальную скорость груза.



Очевидно, что максимальная скорость достигается в тот момент, когда ускорение груза становится равным нулю: далее груз начинает тормозиться. Ускорение равно нулю, когда силы, действующие с двух сторон, уравниваются. То есть, когда $k_{1\Delta}l_1 = k_{2\Delta}l_2$, при том, что $_\Delta l_1 +_\Delta l_2 =_\Delta l_0$.

$k_{1\Delta}l_1 = k_2\left(_\Delta l_0 -_\Delta l_1\right)$, следовательно

$$_\Delta l_1 =_\Delta l_0 \frac{k_2}{\left(k_1+k_2\right)};\ _\Delta l_2 =_\Delta l_0 \frac{k_1}{\left(k_1+k_2\right)}$$

При этом сама скорость находится через закон сохранения энергии:

$$\frac{k_{1\Delta}l_0^2}{2} = \frac{k_{1\Delta}l_1^2}{2} + \frac{k_{2\Delta}l_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$mv^2 = \frac{l_0^2 k_1^2}{k_1+k_2}$$

$$v = k_1 l_0 \sqrt{\frac{1}{m\left(k_1+k_2\right)}}$$

Подставляя вместо $v \to I_{\max}$, $k_1 l_0 \to U_1$, $k_i \to \dfrac{1}{C_i}$, $m \to L$, получим

$$I_{\max} = U_1 \sqrt{\frac{1}{L}\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}}$$